**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

**Кафедра компьютерных технологий и систем**

Исследование операций

Отчет по лабораторной работе №1

**Выполнил**

*студент 3 курса 4 группы*

*Иванчук Максим Юрьевич*

**Преподаватель**

*Исаченко А.Н.*

**Задача №1**

**Условие:**

Из четырех видов металла (медь, цинк, свинец, никель)

составляют три вида сплавов: обычный, специальный и для

художественного литья. Цены единицы веса металлов соответственно 0,8

у.е., 0,6 у.е., 0,4 у.е. и 1 у.е., а единицы веса сплава − 2 у.е.., 3 у.е. и 4 у.е.

Сплав для художественного литья должен содержать не менее 6%

никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца, специальный – не

менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более

20% свинца. В обычный сплав металлы входят без ограничений.

Производственная мощность предприятия позволяет выпускать не

более 400 единиц веса обычного сплава, не более 700 единиц

специального сплава и не более 100 единиц сплава для художественного

литья.

Найти план, приносящий максимальную прибыль.

**Модель:**

Обозначим через *xij* долю i-той компоненты (1-медь, 2- цинк, 3-свинец, 4-никель) в j-том виде сплава (1-обычный, 2-специальный и 3-для художественных изделий).

Тогда получим следующие ограничения модели:  
*x*11 + *x*21 + *x*31 + *x*41 =1

*x*12 + *x*22 + *x*32 + *x*42 =1

*x*13 + *x*23 + *x*33 + *x*43 =1

Ограничения на количество компонент в смесях:

*x*12 ≥0.7

*x*22 ≥0.1

*x*32 ≤0.2

*x*42 ≥0.04

*x*13 ≥0.5

*x*33 ≤0.3

*x*43 ≥0.06

Требование неотрицательности переменных:

*x*ij ≥0. i=1,…,4, j=1,2,3.

Целевая функция представляет собой сумму величин прибыли, получаемой с единицы веса каждого сплава:

2(0.8x11 + 0.6x21 + 0.4x31 + x41)+3(0.8x12 + 0.6x22 + 0.4x32 + x42)+4(0.8x13 + 0.6x23 + 0.4x33 + x43)→max

**Задача №2**

**Условие:**

Для производства чугунного литья используется *n* различных шихтовых материалов (чугун, лом, форрофосфор и т. д.). Химический состав чугунного литья определяется содержанием в не *m* химических элементов (кремний, марганец, фосфор и т. д.). Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, задаваемый величинами Hj - процент содержания j*-*го химического элемента в сплаве. Заданы также цены *Сi* - за единицу *i-*го шихтового материала.

Найти наиболее дешевый состав шихты.

**Модель:**

Для параметра, задающего процент содержания *i*го химического элемента в *j*м шихтовом материале, введем обозначение . Значения этих параметров известны.

Управляемые переменные: , *j = 1,...,n*  количество единиц *j*го шихтового материла. Неуправляемых переменных нет.

Ограничения:

Если домножим обе части уравнения на () и перенесём всё влево, то получим

Требуется минимизировать следующую целевую функцию

Или максимизировать

Запишем в матричном виде:

Где

**Задача №5**

**Условие:**

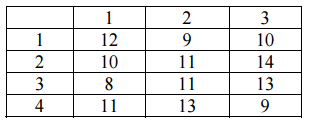
Авиапредприятию необходимо решить, какое количество топлива следует закупить у трех поставщиков, если имеют место следующие ограничения:

а) заправка самолетов осуществляется в четырех аэропортах;

б) нефтяные заводы имеют следующие возможности поставок: 2,5 млн.л., 5 млн.л., 6 млн. л.;

в) распределение топлива по аэропортам осуществляется в следующих количествах: 1 млн. л., 2 млн. л., 3 млн. л., 4 млн. л.

Составить модель оптимального прикрепления поставщиков, если стоимость доставки 1 л топлива задается следующей таблицей:



**Модель:**

Управляемые переменные: – такое количество авиапредприятие должно закупить у -того поставщика и поставить в -тый аэропорт, ,

Ограничения:

,

Целевая функция:

**Задача №8**

**Условие:**

Пусть площадь, отведенная для выращивания сельскохозяйственных культур, состоит из земельных участков. На этих участках выращивается сельскохозяйственных культур (). Причём на участке выращивается только одна культура.

Затраты по возделыванию -й культуры на -м участке выражаются числом , причем возможны дополнительные расходы .

На каждом из участков можно применять удобрение только одного из типов. Дополнительные расходы при использовании -го удобрения на -м участке в случае посадки -й культуры равны . Наконец, каждый из участков можно орошать. Стоимость орошения -го участка равна и не зависит от культуры.

Заданы:

– урожай -й культуры на -м участке с -м удобрением без дополнительных затрат и без орошения;

– то же с орошением без дополнительных затрат;

– то же с дополнительными затратами без орошения;

– то же с дополнительными затратами и с орошением.

Пусть также – заданный средний суммарный урожай -й культуры, а заданный объем соответствующей продукции – . Распределить культуры по участкам с целью минимизации суммарных затрат

**Модель:**

Введём управляемые переменные , которые определены на множестве , и означают, засеяна ли -я культура на -ом участке, использованное -е удобрение (если удобрение не использовалось), - были ли дополнительные затраты, - было ли орошение

Теперь введем неуправляемые переменные

– матрица затрат по возделыванию

- матрица дополнительных расходов

–матрица расходов на удобрения, притом

– вектор стоимости орошения

- матрицы урожаев

*–* вектор средних суммарных урожаев

вектор заданных объемов продукции

– матрицы управляемых переменных

Зададим ограничения

Это ограничение говорит о том, что мы заселили ровно столько каждой культуры, сколько у нас было

Это ограничение говорит о том, что мы получим как минимум средний урожай для каждой культуры

Это ограничение говорит о том, что на каждом участке у нас засеяна ровно 1 культура с явно заданными параметрами о удобрении, дополнительный расходах etc.

Целевая функция будет иметь вид:

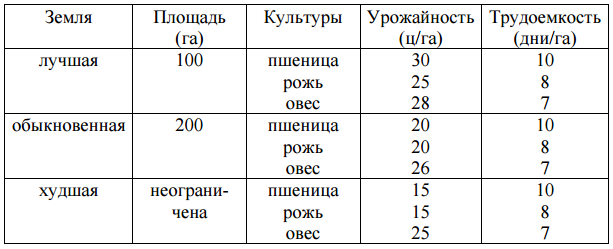
**Задача №9**

**Условие:**

Сельхозпредприятие имеется несколько земельных участков, качественно отличающихся друг от друга. Хозяйство возделывает несколько видов культур.

Необходимо определить, какую площадь каждого участка следует отвести под каждую культуру, чтобы получить запланированные объемы продукции при минимальных затратах.

Решить задачу, используя числовые данные, представленные в следующей таблице:



Плановые задания: пшеница – 5000 ц, рожь – 3500 ц, овес – 5000 ц.

**Модель:**

Пусть 1 – лучшая земля, 2 – обыкновенная земля, 3 – худшая земля.

– площадь, занимаемая пшеницей на i-том типе земли.

– площадь, занимаемая рожью на i-том типе земли.

– площадь, занимаемая овсом на i-том типе земли.

Неуправляемых переменных нет.

Ограничения:

Целевая функция будет иметь вид:

**Задача №11**

**Условие:**

В мастерской имеется 4 станка, которые могут выполнять 3 операции. Каждую операцию единовременно может выполнять только один станок, и каждый станок можно загрузить выполнением только одной операции.

Матрица затрат времени при выполнении i -станком j -й операции имеет вид:

А=

Определить наиболее рациональное распределение операций между станками, минимизирующее суммарные затраты времени.

**Модель:**

Управляемые переменные: – номер операции, которую будет выполнять i-ый станок, . Т.к. никакой операции не будет выполнять лишь один станок, то в модель можно ввести еще одну операцию, которая будет соответствовать отсутствию операций и которая будет иметь нулевые затраты.

Получаем следующие ограничения:

Целевая функция:

где – время необходимое i-ому станку для выполнения -ой операции. Нулевая операция – введенная нами операция, при этом как говорилось выше

**Задача №12**

**Модель:**

В различных концах города находятся пять автохозяйств, которые должны выделить по одному грузовику и послать в пять различных сельхозпредприятий за овощами, поставляемыми пяти овощным базам.

Известно время, затрачиваемое автомобилями на дорогу до каждого предприятия, время, время на доставку их на базы и время, необходимое для погрузки овощей. Эти данные приведены в следующих таблицах:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Сельхозпредприятия | | | | |
| Машины | A | B | C | D | E |
| I | 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |
| II | 4 | 6 | 3 | 1 | 3 |
| III | 2 | 4 | 2 | 3 | 6 |
| IV | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| V | 1 | 7 | 3 | 2 | 5 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базы | | | | | | | | |  | |
| Предприятия | a | b | | c | | d | | e | |  | |
| A | 4 | 6 | | 1 | | 2 | | 5 | |  | |
| B | 2 | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | |  | |
| C | 1 | 5 | | 3 | | 4 | | 2 | |  | |
| D | 2 | 4 | | 5 | | 6 | | 3 | |  | |
| E | 5 | 2 | | 1 | | 3 | | 4 | |  | |
| Сельхозпредприятия | | | A | | B | | C | | D | | E |
| Время погрузки | | | 2 | | 4 | | 3 | | 2 | | 1 |

Требуется так организовать распределение транспорта, чтобы минимизировать затраты времени, связанные с его эксплуатацией.

**Модель:**

Построим математическую модель данной задачи. Рассмотрим следующие переменные:

,

Целевая функция будет иметь вид:

**Задача №13**

**Условие:**

Самолеты авиакомпании совершают рейсы между двумя городами A и B в обоих направлениях. Если база экипажа находится в A (B) и экипаж прибывает в B (A) определенным рейсом, то он должен вернуться в A (B) одним из рейсов (возможно, на следующий день). Между полетами у экипажа должен быть отдых не менее часа.

Компания стремится выбрать обратный рейс так, чтобы минимизировать время нахождения экипажа в аэропорту, который не является базой экипажа.

При заданном расписании полетов требуется решить:

1) какие рейсы спарить (спаренный рейс – рейс в оба конца, выполняемый одним и тем же экипажем)?

2) где выбрать базу при заданных спаренных рейсах?

Расписание рейсов

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Рейс | Вылет из А | Прибытие в В | Рейс | Вылет из В | Прибытие в А |
| 1 | 7.30 | 9.00 | 2 | 7.00 | 10.00 |
| 3 | 8.15 | 9.15 | 4 | 7.45 | 10.45 |
| 5 | 14.00 | 15.30 | 6 | 11.00 | 14.00 |
| 7 | 17.45 | 19.15 | 8 | 18.00 | 21.00 |
| 9 | 19.00 | 20.30 | 10 | 19.30 | 22.30 |

**Модель:**

Пусть 𝑖 – номер рейса, совершающего из базы, ; тогда 𝑗 - номер рейса, совершающего обратно на базу,. В нашем случае 𝑛=5.

Так как рейс может быть совершен лишь одним экипажем, введем ограничения:

За единицу стоимости (нахождение экипажа в аэропорту, не являющегося для него базой) возьмем 15 мин. Введем матрицу стоимости *С*, где – стоимость пребывания в аэропорту, если рейс (𝑖,𝑗) - спаренный.

Целевая функция будет иметь вид:

**Задача №14**

**Условие:**

Из пункта А в пункт В и обратно отправляются четыре поезда, согласно расписанию:

из А в В – 9.00, 12.00, 16.00, 20.00;

из Б в В – 10.00, 15.00, 18.00, 22.00.

Время в пути для всех поездов одинаково и равно шести часам. Локомотивы, ведущие поезда, совершают в сутки два рейса: один из пункта, к которому локомотив прикреплен, и второй обратно с ближайшим очередным рейсом.

Найти оптимальное закрепление локомотивов за пунктами А и В, при котором достигается минимум суммарного времени простоя локомотивов.

## **Модель:**

Маршрут локомотива состоит из 2 поездок из разных пунктов. Запишем возможные маршруты локомотивов. Для этого обозначим рейсы из *A* в *B* в 9:00 за А9, в 12:00 – А12 и т.д., из *B* в *A* в 10:00 за В10, в 15:00 – В15 и т.д. Тогда возможные маршруты локомотива, простой и переменные соответствующие каждому маршруту:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **Маршруты** | А9-В15 | А12-В18 | А16-В22 | А20-В10 | В10-А16 | В15-А9 | В18-А9 | В22-А9 |
| **Простой** | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 12 | 9 | 5 |

Переменные являются управляемыми и могут принимать значения 1 либо 0, когда маршрут существует и не существует соответственно. Так как всего есть 8 рейсов, а каждый локомотив ездит по 2, то всего будет существовать 4 маршрута. Существующие маршруты не могут пересекаться, так как разные локомотивы не могут ехать с одним рейсом, на основе этого составим систему:

Целевая функция будет иметь вид:

**Задача №15**

**Условие:**

Банк предоставляет набор услуг по кредитованию. Возможные типы банковских кредитов приведены в таблице. Безнадёжные долги считаются не возвратимыми, поэтому они должны вычитаться из возможного дохода.

Конкурентная борьба вынуждает банк не менее 40% портфеля кредитов помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты. Для содействия строительной индустрии банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не меньше, чем общая сумма кредитов физическим лицам и на покупку автомобилей. Банк поддерживает государственную политику, указывающую, что отношение безнадёжных долгов ко всей сумме кредитов не должно превышать 0,04.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Тип кредита | Ставка процента | Вероятность безнадёжных долгов |
| Кредиты физическим лицам | 0,14 | 0,1 |
| Кредиты на покупку автомобилей | 0,13 | 0,07 |
| Кредиты на покупку жилья | 0,12 | 0,03 |
| Сельскохозяйственные | 0,125 | 0,05 |
| Коммерческие | 0,1 | 0,02 |

Сформировать портфель кредитов объёмом 12 млн. долларов, для получения максимальной чистой прибыли.

**Модель:**

Определим неизвестные и их количество. Рассмотрим управляемые переменные *−* сумма (в млн долларов) кредита типа *i*, где *i* *−* тип кредита, соответствующий номеру из таблицы.

Запишем целевую функцию– максимальная чистая прибыль от всех типов кредитов.

Целевая функция данной модели зависит от неизвестных переменных и известных значений –разности процентной ставки и вероятности безнадежных долгов *i*-го типа кредита, т.к. безнадёжные долги считаются невозвратимыми. И запишется целевая функция в следующем виде:

Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

Конкурентная борьба вынуждает банк не менее 40% портфеля кредитов помещать в сельскохозяйственные и коммерческие кредиты.

Для содействия строительной индустрии банк планирует вложить в кредиты на покупку жилья не меньше, чем общая сумма кредитов физическим лицам и на покупку автомобилей.

Банк поддерживает государственную политику, указывающую, что отношение безнадёжных долгов ко всей сумме кредитов не должно превышать 0.04.

Сформировать портфель кредитов объёмом 12 млн. долларов, для получения максимальной чистой прибыли.

Ограничения задачи совместны.

Математическая модель:

**Задача №16**

**Условие:**

Планируя расходы на обучение ребёнка, семейная пара решила ежегодно откладывать определённые суммы в течение 10 лет, начиная с 8-летнего возраста ребёнка. По годам эти суммы запланированы следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Год | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Сумма  (долл.) | 2000 | 2000 | 2500 | 2500 | 3000 | 3500 | 3500 | 4000 | 4000 | 5000 |

Семейная пара решила вложить деньги в: 1) страховой полис с 7,5% годовых; 2) шестилетние ценные бумаги с 7,9% годовых (текущая рыночная стоимость ценных бумаг равна 98% номинальной стоимости); 3) девятилетние ценные бумаги с доходностью 8,5% годовых (их текущая рыночная стоимость равна 1,02 от номинальной стоимости)/

Определить оптимальный план вложения денег и ежегодные доходы.

**Модель:**

Обозначим через

* - прибыль от вложения в страховой полис с 7,5% ,
* – прибыль от вложения в шестилетние бумаги с 7,9% годовых (текущая рыночная стоимость ценных бумаг равна 98% номинальной стоимости)
* - прибыль от вложения в девятилетние ценные бумаги с доходностью 8,5% годовых (их текущая рыночная стоимость равна 1,02 от номинальной стоимости).

В введенных переменных i – год, в котором деньги были вложены в соответствующие вклады.

Пусть - сумма вклада в i-ом году. Тогда получаем:

Тогда целевая функция запишется в виде:

Справедливы следующие ограничения:

**Задача №17**

**Условие:**

Фирма собирает персональные компьютеры для заказчиков. На год, поквартально имеются заказы на 400, 700, 500 и 200 компьютеров соответственно. Фирма может собирать больше компьютеров, чему казано в заказах, но в таком случае приходится платить 100 у.е. за хранение собранного компьютера в течение квартала. Увеличение производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, приводит к необходимости набора дополнительных работников, что повышает себестоимость компьютера на 60 у.е. При уменьшении производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, необходимо сокращать персонал, что также увеличивает себестоимость компьютера на 50 у.е.

Как организовать сборку компьютеров с наименьшими издержками, чтобы удовлетворить все заказы?

**Модель:**

Пусть – количество компьютеров, произведённых компанией за 1-ый, 2-ой, 3-ий и 4-ый кварталы соответственно, . Тогда ясно, что для того, чтобы удовлетворить все заказы, эти четыре величины должны удовлетворять следующим равенству и неравенствам:

Построим функцию издержек за весь год. Для этого введём переменные определяемые следующим образом:

Вычислим издержки при производстве компьютеров за год:

Целевая функция имеет вид: